

Náhrada pátečního 10. cvičení

K 3. zápočtové písemce

- Při používání VOLS F (P) pozor, na okolí **kterého bodu** nemá vnitřní funkce nabývat **které hodnoty**
- Při ověření podmínky (P) např. u $g(x) = \frac{2}{x}$ je argumentace následující: $x \in P(\infty, 1) \implies x \in \mathbb{R} \implies \frac{2}{x} \neq 0$.
- růstová škála funguje jen pro posloupnosti, nelze je proto používat u funkcí
- Užití l'Hospitala: je potřeba psát, že jsme ho použili - tj. $\stackrel{\text{l'H}}{=}$ - a o jaký případ jde - $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$ (aby bylo jasné, že jsme ověřili předpoklady). Občas je potřeba i obhájit, že jde skutečně o $\frac{0}{0}$, či $\frac{\infty}{\infty}$ (ne vždy to musí být zřejmé...)
- $0 \cdot \infty$ je nedefinovaný výraz, což pouze znamená, že jsme nemohli použít VoAL (viz znění VoAL). **Neznamená to však, že limita neexistuje!** Daná limita se musí spočítat jinak obvykle, nebo jinak dokázat, že nekonverguje.

- Pozor na použití VoAL. Například následující rovnost z VoAL neplyne: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} =$
 $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y} + \sqrt{y}}{\sqrt{y} + \sqrt{y}}.$ Platí však $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \stackrel{\text{VoAL} + \text{VOLS F(S)}}{=} \frac{\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} + \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y}}{\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} + \lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y}},$ kde užití VOLS F(S) je následující: $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{a}{x^2} = 1$ pro $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, vnitřní funkce pak je $g_a(x) = 1 + \frac{a}{x^2}$ a vnější je $f(y) = \sqrt{y}$, která je spojitá v 1.
- Pozor, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$ není 1, ale $\sqrt{2}$ (opět dle VOLS F(S)).
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \log(1 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)} = \left|g(x) = 1 + \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1, f(y) = \sqrt{y}, f \text{ spoj. v } 1\right| \stackrel{\text{VOLS F(S)}}{=} \frac{1}{1 + \sqrt{1}} = \frac{1}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}} = \left|g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0\right| \stackrel{\text{VOLS F(P)}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} \stackrel{\text{ZL}}{=} 1$

Slovo k teorii

- Spojitost funkce obvykle přes: složení spoj. fcí je spoj.
- Lichá funkce speciálně splňuje, že $f(0) = 0$. K ukázání, že funkce není lichá stačí ukázat, že $f(0) \neq 0$.
- Lichost a sudost má z definice smysl řešit jen pro $D(f)$, který je symetrický kolem bodu 0.
- Krajních bodech $D(f)$ jsou myšleny jako krajní body intervalů, jejichž sjednocení je $D(f)$ - nejde tedy nutně o nekonečna. Pokud by např. byl $D(f) = (0, 2) \cup (3, 4)$, tak bychom počítali jednostrané limity f v bodech 1, 2, 3, 4.
- U zkoušky se po Vás nemusí chtít kompletní graf se vším všudy, ale třeba jen nějaké aspekty - apř. určit $D(f)$, monotonii a asymptoty (apod.).

- Při vyšetřování grafů funkcí níže se budeme držet postupu z teorie.

Příklad 1 (c) $f(x) = e^{-x^2+3x-7}$

1. Definiční obor, spojitost

Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$ a f je spojitá na $D(f)$, neb složení spojitých funkcí je spojitá funkce a $f = g \circ h$, kde $g(x) = e^x, h(x) = -x^2 + 3x - 7$.

2. symetrie, periodičita

Funkce f zřejmě není periodická.

Dále platí

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x^2+3x-7} \\ f(-x) &= e^{-x^2-3x-7} \end{aligned}$$

Platí, že $f(1) \neq f(-1)$, což nám dokládá, že f není sudá. Navíc $f(0) \neq 0$, což dokládá, že f není lichá.

3. limity v krajních bodech intervalu

Jelikož $D(f) = \mathbb{R}$, budeme vyšetřovat limity f v $\pm\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2+3x-7} \stackrel{\text{VOLS F (P)}}{=} 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0 \quad (\text{analogicky}) \end{aligned}$$

4. f' , monotonie, extrémy

$$f'(x) = \left(e^{-x^2+3x-7} \right)' = e^{-x^2+3x-7} \cdot (-x^2 + 3x - 7)' = e^{-x^2+3x-7} (-2x + 3)$$

Platí, že $e^{-x^2+3x-7} > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Kladnost f' tedy závisí pouze na $(-2x + 3)$.

$$f'(x) > 0 \iff (-2x + 3) > 0 \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2}$$

Dle věty 3.25 je f na $(-\infty, \frac{3}{2})$ rostoucí a na $(\frac{3}{2}, \infty)$ klesající. Dále nabývá v bodě $\frac{3}{2}$ lokálního maxima $f(\frac{3}{2}) = e^{-\frac{19}{4}}$.

5. f'' , konvexitá/konkávnost, inflexní body

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^{-x^2+3x-7} (-2x + 3) \right)' = \left(e^{-x^2+3x-7} \right)' (-2x + 3) + e^{-x^2+3x-7} \cdot (-2x + 3)' = \\ &= e^{-x^2+3x-7} (-2x + 3) (-2x + 3) - 2e^{-x^2+3x-7} = e^{-x^2+3x-7} (4x^2 - 12x + 7) \end{aligned}$$

Opět $e^{-x^2+3x-7} > 0$ pro každé reálné x , tedy kladnost f'' závisí na kladnosti výrazu $4x^2 - 12x + 7$.

$$f'' > 0 \iff 4x^2 - 12x + 7 > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$$

Dle věty 3.31 je f konvexní na $\left(-\infty, \frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ a konkávní na $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

6. asymptoty

Asymptoty spočteme dle věty 3.32.

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \cdot \frac{1}{x} \stackrel{\text{V\textsubscript{O}AL}}{=} 0 \cdot 0 = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Tedy asymptota f v ∞ je $y = ax + b = 0x + 0 = 0$. Analogicky asymptota f v $-\infty$ je $y = 0$.

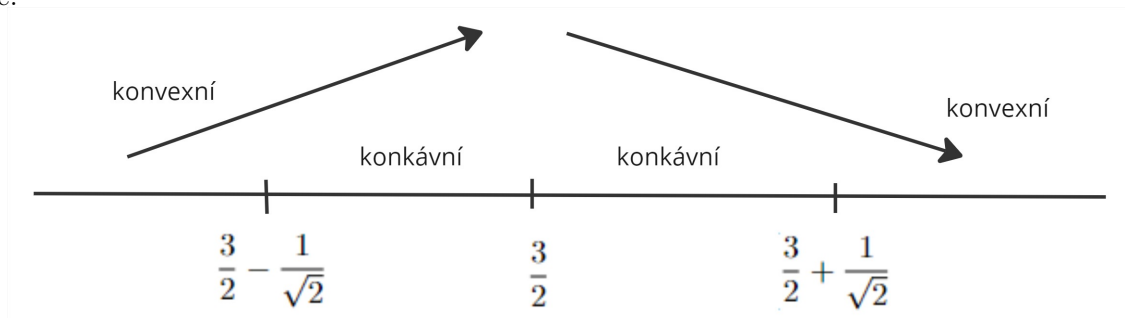
7. Graf

Zjištěné informace:

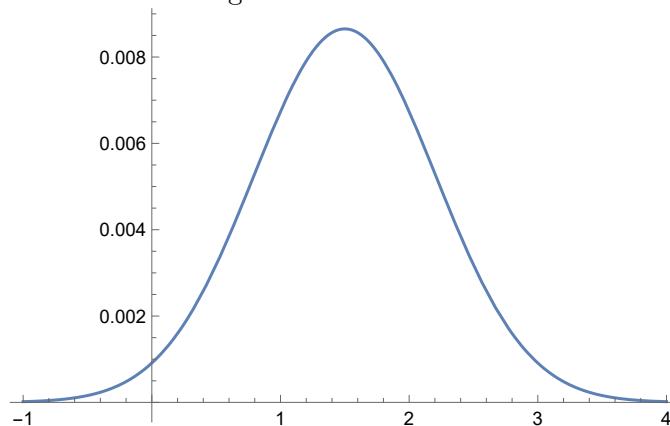
$D(f) = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$

V nekonečrech jde f do nuly a má tam za asymptotu na obou stranách osu x (což je $y = 0$).

Dále:



Na základě těchto informací nakreslíme graf:



Další příklad $f(x) = \arccos\left(\frac{2\log x}{1+\log^2 x}\right)$

1. Definiční obor, spojitost

Definiční obor logaritmu $\implies x > 0$. Dále $\arccos$ je definován na $[-1, 1]$. Proto musí (všimněme si, že $1 + \log^2 x > 0$, tedy ze zlomku neplyne podmínka a jmenovatelem lze násobit nerovnicí):

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{2\log x}{1+\log^2 x} \leq 1 \\ -1 - \log^2 x &\leq 2\log x \leq 1 + \log^2 x \\ \log^2 x + 2\log x + 1 &\geq 0 \wedge \log^2 x - 2\log x + 1 \geq 0 \\ (\log x + 1)^2 &\geq 0 \wedge (\log x - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ je $\frac{2\log x}{1+\log^2 x} \in [-1, 1]$. Máme proto jedinou podmínku a to $x > 0$. Proto $D(f) = (0, \infty)$.

Jelikož f je složením spojitých funkcí $\arccos x$, $\frac{2x}{1+x^2}$, $\log x$, tak je spojitou funkcí na celém $D(f)$.

2. symetrie, periodicitá

Funkce zřejmě není periodická.

Jelikož nemá symetrický definiční obor, tak nemá smysl mluvit o lichosti či sudosti.

3. limity v krajních bodech intervalu

Spočteme limity f v $0, \infty$, což jsou krajní body $D(f)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2\log x}{1+\log^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2\log x}{\log x \left(\log x + \frac{1}{\log x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2}{\log x + \frac{1}{\log x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &\stackrel{\text{VOLSF (S)}}{=} \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{analogicky} \end{aligned}$$

4. f' , monotonie, extrémy

Při výpočtu f' chceme použít vzorec pro derivaci $\arccos$. Ten lze ale vzorcem derivovat pouze na otevřené množině, tedy pouze na $(-1, 1)$, nikoli v krajích hodnotách (jak je též vidno v tabulce derivací). Proto spočteme f' nejdříve v bodech, kde argument $\arccos$ není ± 1 . Určeme nejdříve dané body.

$$\begin{aligned} \frac{2\log x}{1+\log^2 x} &\neq \pm 1 \\ 2\log x &\neq -1 - \log^2 x \vee 2\log x \neq 1 + \log^2 x \\ (\log x + 1)^2 &\neq 0 \vee (\log x - 1)^2 \neq 0 \\ \log x &\neq -1 \vee \log x \neq 1 \\ x &\notin \left\{\frac{1}{e}, e\right\} \end{aligned}$$

Tedy pro $x \neq e, \frac{1}{e}$ počítáme f' následujícím způsobem.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\arccos \left(\frac{2 \log x}{1 + \log^2 x} \right) \right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 \log x}{1 + \log^2 x} \right)^2}} \cdot \frac{\frac{2}{x} (1 + \log^2 x) - 2 \log x \left(\frac{1}{x} 2 \log x \right)}{(1 + \log^2 x)^2} = \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{\frac{(1 + \log^2 x)^2 - 4 \log^2 x}{(1 + \log^2 x)^2}}} \cdot \frac{2x + 2x \log^2 x - \frac{4}{x} \log^2 x}{(1 + \log^2 x)^2} = \\
 &= - \frac{|1 + \log^2 x|}{\sqrt{1 + 2 \log^2 x + \log^4 x - 4 \log^2 x}} \cdot \frac{2 + 2 \log^2 x - 4 \log^2 x}{x (1 + \log^2 x)^2} = \\
 &= - \frac{1 + \log^2 x}{\sqrt{\log^4 x - 2 \log^2 x + 1}} \cdot \frac{2 - 2 \log^2 x}{x (1 + \log^2 x)^2} = \frac{2 (\log^2 x - 1)}{x (1 + \log^2 x) \sqrt{(\log^2 x - 1)^2}} = \\
 &= \frac{2 (\log^2 x - 1)}{x (1 + \log^2 x) |\log^2 x - 1|}
 \end{aligned}$$

Všimněme si, že pro $x \neq e, \frac{1}{e}$ je spočtený výraz definován.

Připomeňme definici funkce signum: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Dále si uvědomme, že $\frac{a}{|a|} = \operatorname{sgn} a$ pro $a \neq 0$.

Pak lze zapsat $f'(x)$ jako $f'(x) = \frac{2 \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)}{x(1 + \log^2 x)}$.

Poznámka: Užití funkce sgn tu sice není nutné, ale často může usnadnit zápis.

Než se pustíme do vyšetření f' v bodech $e, \frac{1}{e}$, zjistíme, kdy je $\log^2 x - 1 > 0$.

$$\begin{aligned}
 \log^2 x - 1 &> 0 \\
 \log^2 x &> 1 \\
 \log x &> 1 \vee \log x < -1 \\
 x &\in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, \infty)
 \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x(1 + \log^2 x)}, & x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e, \infty) \\ \frac{-2}{x(1 + \log^2 x)}, & x \in \left(\frac{1}{e}, e\right) \end{cases}.$$

Z bodu 1. víme, že je funkce f spojitá na $D(f)$, tedy speciálně i v bodech $e, \frac{1}{e}$ - lze proto užít větu 3.27

$$\begin{aligned}
f'_+ \left(\frac{1}{e} \right) &\stackrel{\text{V 3.27}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}+} \frac{-2}{x(1 + \log^2 x)} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \frac{-2}{\frac{1}{e}(1 + (-1)^2)} = -e \\
f'_- \left(\frac{1}{e} \right) &= e \quad (\text{analogicky}) \\
f'_+(e) &= \frac{1}{e} \quad (\text{analogicky}) \\
f'_-(e) &= -\frac{1}{e} \quad (\text{analogicky})
\end{aligned}$$

Vidíme, že jednostrané derivace vychází různě, tedy derivace v daných bodech neexistují. Tyto body jsou proto z věty 3.22 podezřelé z lok. extrému.

Dále zřejmě f na $(0, \frac{1}{e}) \cup (e, \infty)$ roste a na $(\frac{1}{e}, e)$ klesá. Z toho vyplývá, že v bodech $e, \frac{1}{e}$ jsou skutečně lokální extrémy.

5. f'' , konvexita/konkávnost, inflexní body

Druhá derivace může existovat jen tam, kde existuje první, proto se ji pokusíme spočítat pouze na $(0, \infty) \setminus \{\frac{1}{e}, e\}$.

Na intervalech $(0, \frac{1}{e}), (\frac{1}{e}, e), (e, \infty)$ se funkce $\operatorname{sgn}(\log^2 x - 1)$ chová konstantně a můžeme k ní přistupovat jako k číslu.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2 \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1) \left(\frac{1}{x(1 + \log^2 x)} \right)' = 2 \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1) \frac{-(1 + \log^2 x) - x \frac{2}{x} \log x}{x^2 (1 + \log^2 x)^2} = \\
&= -2 \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1) \frac{(\log x + 1)^2}{x^2 (1 + \log^2 x)^2}
\end{aligned}$$

K určení konvexity/konkávnosti nás kvůli Větě 3.31 zajímá, kdy je $f'' > 0$. V předpisu f'' je zlomek vždy kladný, tedy záleží na hodnotě signumu.

$$f'' > 0 \iff \operatorname{sgn}(\log^2 x - 1) < 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, e \right)$$

Tedy funkce f je na $(0, \frac{1}{e}) \cup (e, \infty)$ konkávní a na $(\frac{1}{e}, e)$ konvexní.

6. asymptoty

Asymptotu spočteme jen v ∞ , neb na okolí $-\infty$ nemáme $D(f)$. Opět uijeme větu 3.32.

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{V oAL}}{=} \frac{\pi}{2} \cdot 0 \\
b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Asymptota v nekonečnu tedy je $y = \frac{\pi}{2}$.

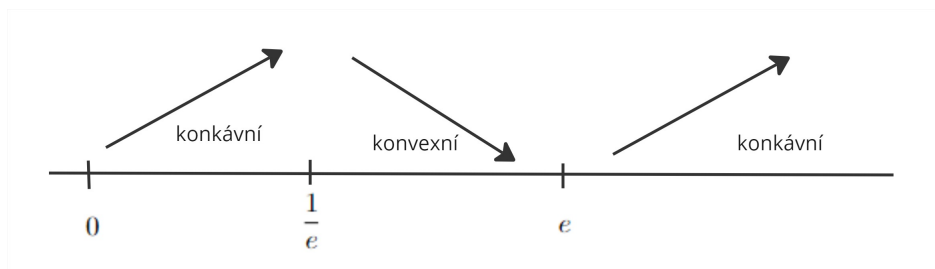
7. Graf

Získané informace:

$D(f) = (0, \infty)$, f spojitá na celém $D(f)$.

V nekonečnu je asymptota $y = \frac{\pi}{2}$.

A dále:



Na základě těchto informací nakreslíme graf:

